1 DÉFINITIONS ET EXEMPLES

I- Introduction

Il est question de *fonction*, dès qu'une quantité dépend d'une autre

- La longueur d'un cercle dépend du rayon de ce cercle, la relation $L = 2\pi r$ étant la règle qui relie les deux grandeurs L et r. A chaque valeur (positive) de r correspond une valeur (positive) de L. L est une *fonction* de r.
- La distance parcourue par un mobile en $m.r.u$ à la vitesse v constante dépend du temps écoulé, la relation $e = v.t$ étant la règle qui relie les deux grandeurs e et t. A chaque valeur de t correspond une valeur de e. e est une fonction de t.
- L'aire d'un carré est fonction de la mesure de son côté.
- Le prix à payer est fonction de la quantité achetée.
- La différence de potentiel aux bornes d'une résistance est fonction de la résistance.

Les fonctions décrites sont définies par une formule. Une fonction peut aussi être présentée :

- verbalement, en la décrivant par des mots ;
- numériquement, par un tableau de valeurs ou
- visuellement, par un graphique.

Il est évidemment possible de passer d'une présentation à l'autre. Ainsi, par exemple, un tableau de valeurs peut être facilement représenté par un graphique de points. S'il est, cependant, généralement impossible de décrire ces valeurs par une formule explicite, il existe des *méthodes* qui permettent de déterminer une fonction explicite qui relie *approximativement* les valeurs données. C'est un *modèle mathématique* qui décrit le modèle proposé.

Il faut remarquer que pour la résolution d'un problème, il n'est pas nécessairement indispensable de passer par une formule explicite.

II- Définitions

1- Les fonctions réelles f dans un ensemble $A \subset R$

Une fonction réelle f dans une partie A de R est une loi qui associe *un* et *un seul* nombre réel $f(x)$ à chaque valeur réelle x de A.

x est la variable indépendante, $f(x)$ est la variable dépendante ou valeur de la fonction f en x.

Notation : $f : A \to B : x \to f(x)$ ou $f : x \to f(x)$

Exemples

$f : x \to f(x) = 3x + 4$ est une fonction du 1^e degré.

$f : x \to f(x) = x^2$ est une fonction carrée.

$f : x \to f(x) = x^3 - 3x$ est une fonction cubique.

Attention que : $f : x \to f(x) = \pm\sqrt{x}$ n'est pas une fonction (si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$ ou $f(1) = -1$).

2- Le domaine de définition (A) d'une fonction f

Le domaine de définition (A) d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable (x) pour lesquelles la fonction $f(x)$ peut être calculée.

La notation désignant le domaine de définition d'une fonction est $domf$.

$$domf = \{x \in R : f(x) \text{existe}\}$$

Exemples

$$f : x \to f(x) = x^3 - 3x \quad ; \quad domf = R$$

$$g : x \to g(x) = \sqrt{2 - x} \quad ; \quad \begin{aligned} domg &= \{x \in R : 2 - x \geq 0\} \\ &= \{x \in R : x \leq 2\} \\ &=]-\infty, 2] \end{aligned}$$

$$h : x \to h(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad ; \quad \begin{aligned} domh &= \{x \in R : x^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in R : x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[\end{aligned}$$

$$k : x \to k(x) = \operatorname{tg} x \quad ; \quad domk = R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$$

3- Le domaine image (B) d'une fonction f

Le domaine image (B) d'une fonction réelle f est l'ensemble des valeurs réelles que prend la fonction quand x est dans le domaine de définition.

La notation d'un domaine image est imf .

$$imf = \{ f(x) \in R : x \in domf \}$$

Exemples

$$f : x \to f(x) = x^3 - 3x \quad ; \quad imf = R$$

$$g : x \to g(x) = \sqrt{2-x} \quad ; \quad imf = [0, +\infty[$$

$$h : x \to h(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad ; \quad imf =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$k : x \to k(x) = tgx \quad ; \quad \begin{aligned} imk &= R \\ &=]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

4- Le graphique d'une fonction f ou représentation de la fonction

Le graphique d'une fonction f est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont $(x, f(x))$ avec $x \in domf$.

La notation du graphique est : Gf .

$$Gf = \{ (x, f(x)) \in R^2 : x \in domf \}$$

Il faut remarquer que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe représentée.

Exemples

$$f : x \to f(x) = x^3 - 3x$$

La *figure* 1.1 est la représentation graphique cette fonction.

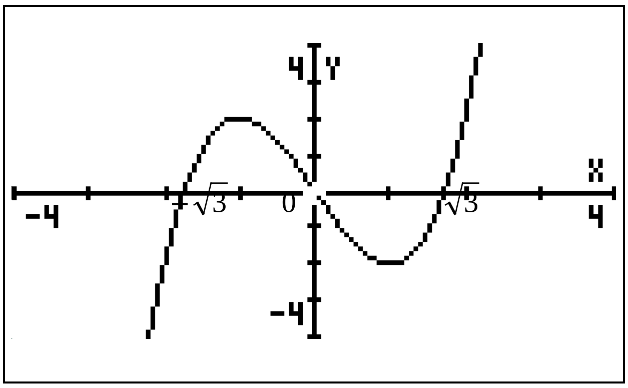

Figure 1.1

$$j : x \to j(x) = \frac{1}{x}$$

La *figure* 1.2 est la représentation graphique de la fonction.

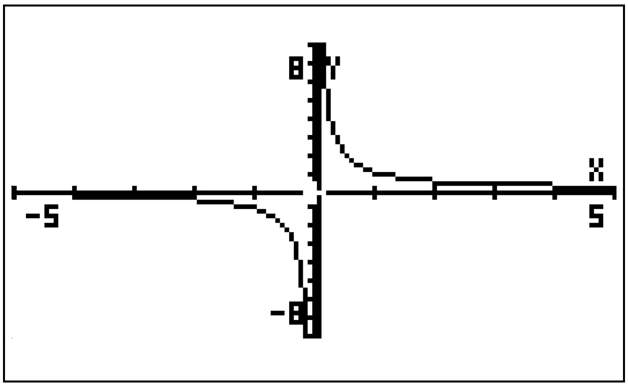

Figure 1.2

Interprétation graphique de $domf$, imf

La *figure* 1.3 reprend le graphique d'une fonction dont $domf = [a,b[$ et $imf = [c,d]$.

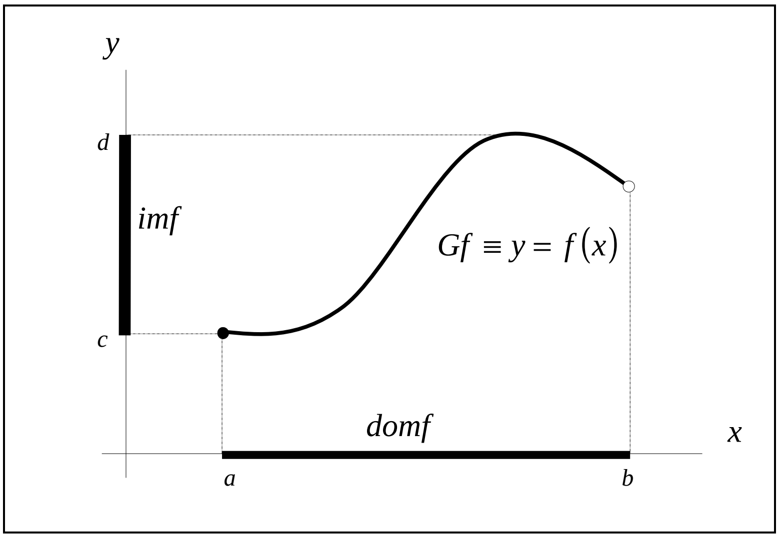

Figure 1.3

Remarque : la représentation graphique d'une fonction est une courbe du plan Oxy. Mais parmi les courbes du plan Oxy, seules, celles qui vérifient le ***test de la verticale*** sont des représentations de fonctions. Une courbe de Oxy représente une fonction si, et seulement si, toute parallèle à l'axe y ne rencontre pas plus d'une fois la courbe. Ce test est évidemment la traduction graphique de la définition d'une fonction.

Ainsi, une courbe telle que celle de la *figure* 1.4 ne représente pas une fonction mais peut-être décrite par deux fonctions.

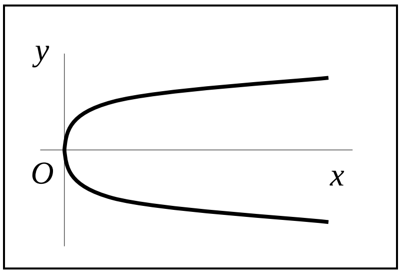

Figure 1.4

La première des deux fonctions est $f_1 : x \to f_1(x) = \sqrt{x}$ définie dans $[0,+\infty[$ et correspond à la *figure* 1.5.

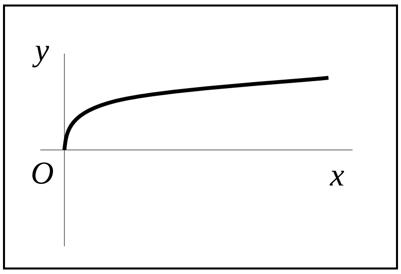

Figure 1.5

La seconde, $f_2 : x \to f_2(x) = -\sqrt{x}$ définie dans $]0,+\infty[$, est représentée sur la *figure* 1.6.

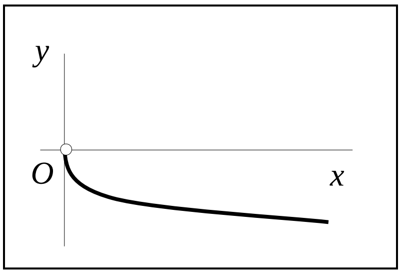

Figure 1.6

Il est néanmoins possible d'éviter de décrire de telles courbes par plusieurs fonctions. Si la notion de *courbes paramétrées* est introduite, la courbe tout entière est alors décrite par ses équations paramétriques.

5- Les zéros (ou racines) d'une fonction f

Les zéros d'une fonction f sont les valeurs de la variable appartenant à $domf$ qui annulent la fonction, c'est-à-dire, telles que $f(x) = 0$.

$x = x_0$ est donc un zéro de f si $f(x_0) = 0$ avec $x_0 \in domf$.

Exemples

$f : x \to f(x) = x^3 - 3x$ possède 3 zéros en $x = 0 \in domf$, en $x = \sqrt{3} \in domf$ et $x = -\sqrt{3} \in domf$.

$f_1 : x \to f_1(x) = x^3 - 1 (domf_1 = R)$ possède un zéro en $x = 1 \in domf_1$.

$h : x \to h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \left(domh = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right)$ ne possède pas de zéro.

$m : x \to m(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4} \left(domm = \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-2,2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\right)$ ne possède pas de zéro.

Signification graphique : les zéros d'une fonction sont les abscisses des points communs au graphique de f et à l'axe des abscisses, comme les zéros de f visibles sur la *figure* 1.1.

6- Les signes d'une fonction f

Si $I \subset domf$: la fonction f est **positive** sur I si, et si seulement, $f(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Si $I \subset domf$: la fonction f est **strictement positive** sur I si, et si seulement, $f(x) > 0, \forall x \in I$.

Si $I \subset domf$: la fonction f est **négative** sur I si, et si seulement, $f(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Si $I \subset domf$: la fonction f est **strictement négative** sur I si, et si seulement, $f(x) < 0, \forall x \in I$.

Exemples

$f : x \to f(x) = x^3 - 3x$

f est strictement négatif sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0,\sqrt{3}\right[$

f est strictement positif sur $\left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$.

Le graphique est celui déjà évoqué avec la *figure* 1.1. Il suffit de constater que la partie du graphique située au-dessus de l'axe des x correspond aux valeurs de x donnant une fonction positive.

Une fonction f est égale à une fonction g si $domf = domg$ et si $f(x) = g(x), \forall x \in domf$.

7- La parité d'une fonction – fonction paire ou fonction impaire

Si f est une fonction définie sur $domf \subset R$, elle est **paire** si $\forall x \in domf$, $-x \in domf$ et $f(-x) = f(x)$.

Exemple d'une fonction paire

$f : x \to f(x) = x^2 - 7$

$$\begin{aligned} &domf = R \\ &\forall x \in domf, -x \in domf \\ &f(-x) = (-x)^2 - 7 \\ &\quad = x^2 - 7 \\ &\quad = f(x) \end{aligned}$$

La traduction graphique de la parité est représentée sur la *figure* 1.7. Il est visible que les deux points sont placés symétriquement par rapport à l'axe y .

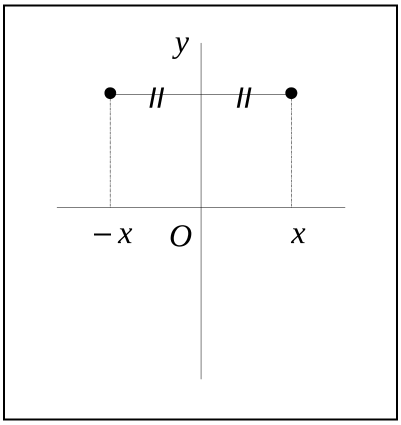

Figure 1.7

Si f est une fonction définie sur $domf \subset R$, elle est **impaire** si $\forall x \in domf$, $-x \in domf$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple d'une fonction impaire

$$f : x \to f(x) = x^3 - x \qquad \begin{aligned} &domf = R \\ &\forall x \in domf, -x \in domf \\ &f(-x) = (-x)^3 - (-x) \\ &\quad = -x^3 + x \\ &\quad = -(x^3 - x) \\ &\quad = -f(x) \end{aligned}$$

La traduction graphique de la parité est représentée sur la *figure* 1.8. Il est visible que les deux points sont placés symétriquement par rapport à l'origine O.

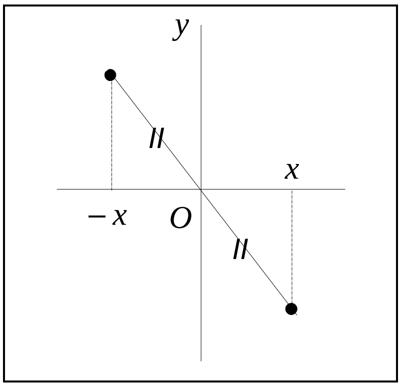

Figure 1.8

Dans le cas où la fonction est paire ou impaire, il est possible de limiter son étude à la partie du domaine incluse dans R^+ et exporter la symétrie. Il faut remarquer qu'une fonction peut n'être ni paire ni impaire, c'est le cas, par exemple de $g : x \to g(x) = \sqrt{2 - x}$.

8- La croissance d'une fonction – fonction croissante et fonction décroissante

Soit une fonction f définie dans le domaine $domf$ et un intervalle I de $domf$.

La fonction est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

La fonction est strictement croissante sur I si, et seulement si, $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

La fonction est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Elle est strictement décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

La fonction est constante sur I si, et si seulement si, $\forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2)$.

La fonction est monotone sur I si elle est croissante **ou** décroissante **ou** constante sur I.

La fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante **ou** strictement décroissante **ou** constante sur I.

Exemple

$$f : x \rightarrow f(x) = x^3 - x \qquad (domf = R)$$

La fonction est strictement croissante sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-1,1[$.

Graphique

La *figure* 1.9a reprend l'interprétation graphique de la croissance et la *figure* 1.9b de la décroissance.

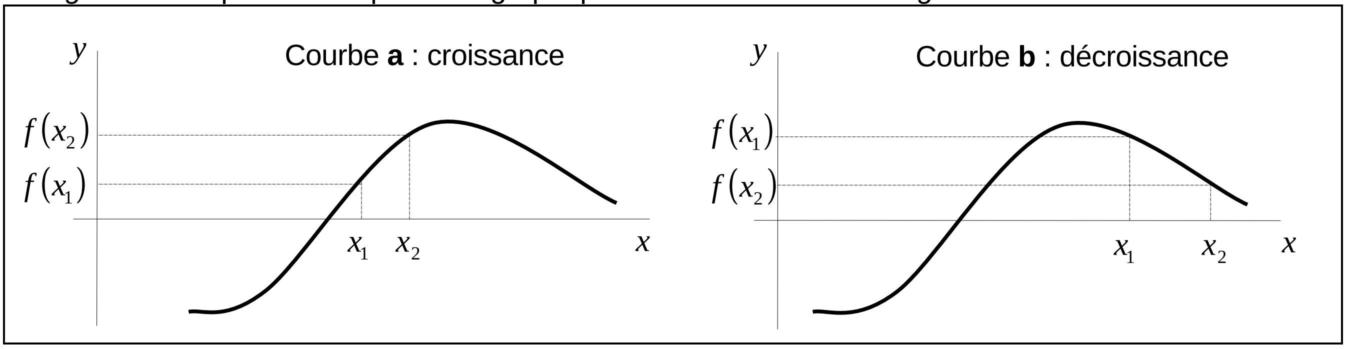

Figure 1.9

9- Maxima et minima d'une fonction

La fonction f possède un maximum local en $x = a \in domf$ si $\exists I \subset domf$ centré sur a tel que $\forall x \in I : f(a) \geq f(x)$. $f(a)$ représente la valeur du maximum.

La fonction f possède un minimum local en $x = b \in domf$ si $\exists I \subset domf$ centré sur b tel que $\forall x \in I : f(b) \leq f(x)$. $f(b)$ représente la valeur du minimum.

Exemple

$f : x \to f(x) = x^3 - 3x$ possède un maximum local en $x = -1$ dont la valeur est $f(-1) = 2$ et un minimum local en $x = 1$ dont la valeur est $f(1) = -2$.

10- Opérations sur les fonctions

Soient les deux fonctions suivantes :

$f : x \to f(x)$ de domaine de définition $domf$

$g : x \to g(x)$ de domaine de définition $domg$

a- Addition et soustraction

$f \pm g : x \to (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ et

$$dom(f \pm g) = domf \cap domg$$

b- Multiplication

$f.g : x \to (f.g)(x) = f(x).g(x)$ et

$$dom(f.g) = domf \cap domg$$

c- Division

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et

$$dom\frac{f}{g} = (domf \cap domg) \setminus \{x \in R : g(x) = 0\}$$

Exemple

$$f : x \to f(x) = x^3 - 3x \quad , \quad domf = R$$

$$g : x \to g(x) = \sqrt{2 - x} \quad , \quad domg =]-\infty, 2]$$

$$f + g : x \to (f + g)(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2 - x} \quad , \quad dom(f + g) =]-\infty, 2]$$

$$f.g : x \to (f.g)(x) = (x^3 - 3x).\sqrt{2 - x} \quad , \quad dom(f.g) =]-\infty, 2]$$

$$\frac{f}{g} : x \to \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{2 - x}} \quad , \quad dom\frac{f}{g} =]-\infty, 2[$$

d- Composition

La composée des fonctions f et g est la fonction : $g \circ f : x \to (g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$$dom(g \circ f) = \{x \in R : f(x) \text{ existe et } f(x) \in dom\, g\}$$

Exemple

$$f : x \to f(x) = 3x - 1 \quad , \quad domf = R$$

$$g : x \to g(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad domf = R_0$$

$$g \circ f : x \to (g \circ f)(x) = \frac{1}{(3x-1)^2} = g[f(x)]$$

$$\begin{aligned} domf(g \circ f) &= \{x \in R : 3x - 1 \neq 0\} \\ &= R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

Il faut remarquer que : $(f \circ g)(x) : x \to= \frac{3}{x^2} - 1 = (f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned} dom(f \circ g) &= \left\{x \in R : \frac{1}{x^2} \text{ existe}\right\} \\ &= \{x \in R : x \neq 0\} \\ &= R_0 \end{aligned}$$

et en général : $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

11- Module

Le module d'un nombre réel est défini de la façon suivante :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Le module d'une fonction est défini ainsi :

$$|f| : x \to |f(x)|$$

La représentation graphique

La *figure* 1.10 montre la représentation d'une fonction (en traits continus) et de son module (en traits interrompus).

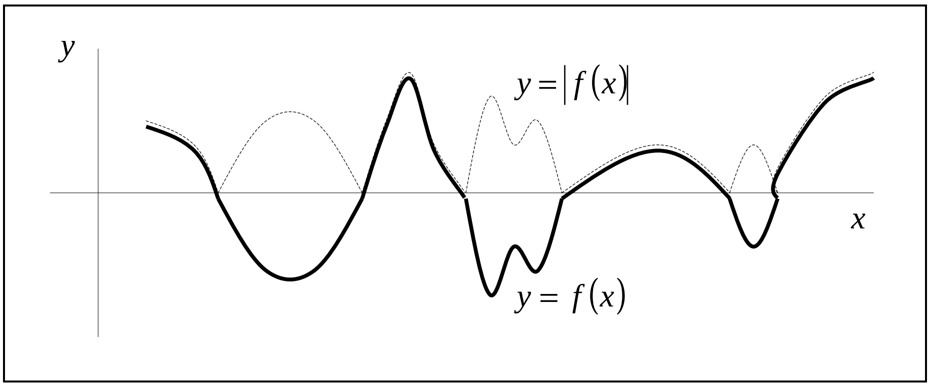

Figure 1.10

Exemple

$$f : x \to f(x) = x^2 - 1$$
$$|f| : x \to |f(x)| = |x^2 - 1|$$

La figure 1.11 montre la différence entre la fonction et son module.

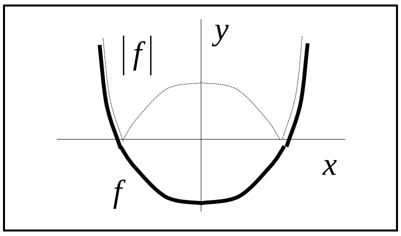

Figure 1.11

12- Les fonctions élémentaires

a- Fonction constante

$\boxed{f : x \to f(x) = k}$ avec k qui est un nombre réel fixé.

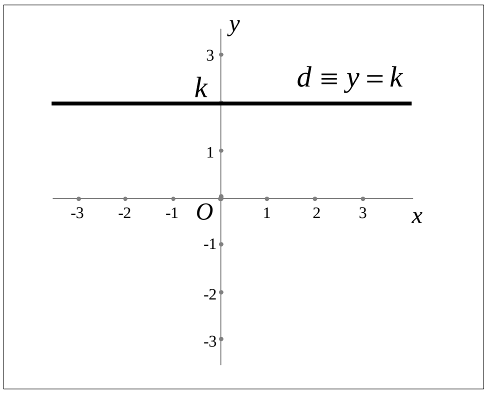

Figure 1.12

$dom f = R$
$im f = \{k\}$
paire
$\mathcal{G}_f$ = droite d'équation $y = k$
droite parallèle à l'axe x

b- Fonction du premier degré

$$\boxed{f : x \to f(x) = ax + b} \quad \text{avec} \quad a \in R_0, b \in R$$

$domf = R$
$imf = R$
$Parité$: ni paire ni impaire si $b \neq 0$, impaire si $b = 0$
$\mathcal{G}_f$ = droite d'équation $y = ax + b$
$zéro : ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{b}{a}$

Signe de la fonction du 1e degré

Valeur de x		$-\dfrac{b}{a}$	
Signe de $f(x) = ax + b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

Equation d'une droite

Parallèle à l'axe x : $y = k$, c'est une fonction constante.

Parallèle à l'axe y : $x = k$, ne correspond pas à une fonction.

Passant par $P(x_p , y_p)$ et $Q(x_Q , y_Q)$

$$y - y_P = \underbrace{\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}}_{\text{Coefficient directeur de la droite } PQ} .(x - x_P) \qquad \text{si} \quad x_Q \neq x_P$$

c- Fonction du deuxième degré

$$\boxed{f : x \to f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \text{avec} \quad a \in R_0, b, c \in R$$

$domf = R$
imf dépend des coefficients
La *parité* dépend des coefficients
Les *zéros* :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad \textit{Pas de zéro réel}$$

$$(x_1, 0) \text{ et } (x_2, 0) \in \mathcal{G}_f$$
$$\text{ou } (x_1, 0) \in \mathcal{G}_f$$
$$\text{ou } x \cap \mathcal{G}_f = \ 0$$

Le graphique est une parabole d’équation $y = ax^2 + bx + c$,

d’axe de symétrie d’équation $x = \frac{-b}{2a}$ et

de sommet $S(-\frac{b}{2a}, \underbrace{-\frac{\Delta}{4a}}_{f\left(\frac{-b}{2a}\right)}) \begin{cases} \text{max si } & a < 0 \\ \text{min si } & a > 0 \end{cases}$

Signe de la fonction du 2e degré

1- Pour $\Delta > 0$

x		x_1		x_2	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe opposé à celui de a	0	Signe de a

2- Pour $\Delta = 0$

x		$x_1 = x_2$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de a

3- Pour $\Delta < 0$

x	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Signe de a

d- Fonction valeur absolue

$$f : x \to f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

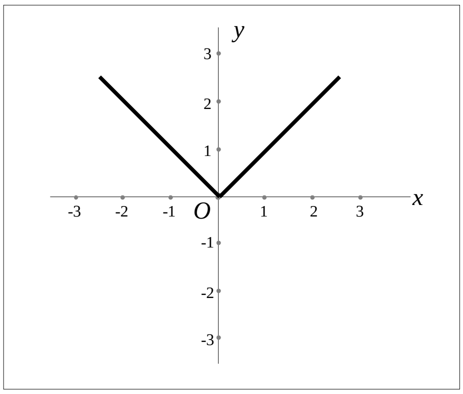

Figure 1.13

$domf = R$

$imf = R^+$

Parité : fonction paire, $\mathcal{G}_f$ symétrique par rapport à l’axe y

Zéros : $x = 0$, $(0, 0) \in \mathcal{G}_f$.

e- Fonction inverse

$$f : x \to f(x) = \frac{1}{x}$$

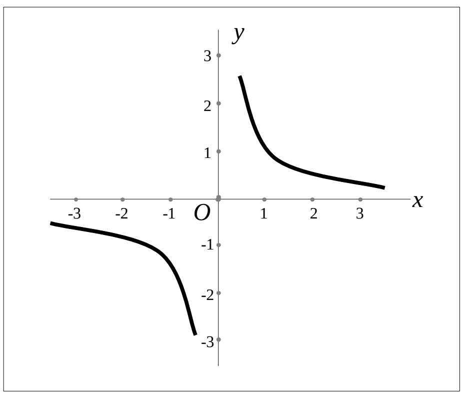

Figure 1.14

$domf = R_0$

$imf = R_0$

Parité : fonction impaire, $\mathcal{G}_f$ symétrique par rapport à 0

Zéros :

g- Fonction sinus

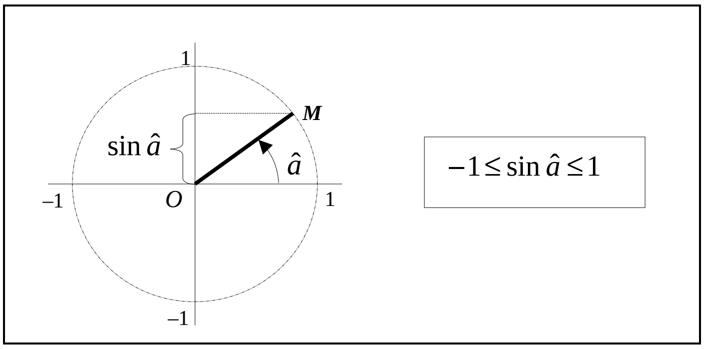

Figure 1.15

$$\boxed{f : x \to f(x) = \sin x} \qquad \text{où} \qquad \sin x = \sin \hat{a}$$

Si x est une mesure en *radians* de l'angle $\hat{a}$ (à chaque nombre réel x est associé un angle $\hat{a}$ dont la mesure en radian est x).

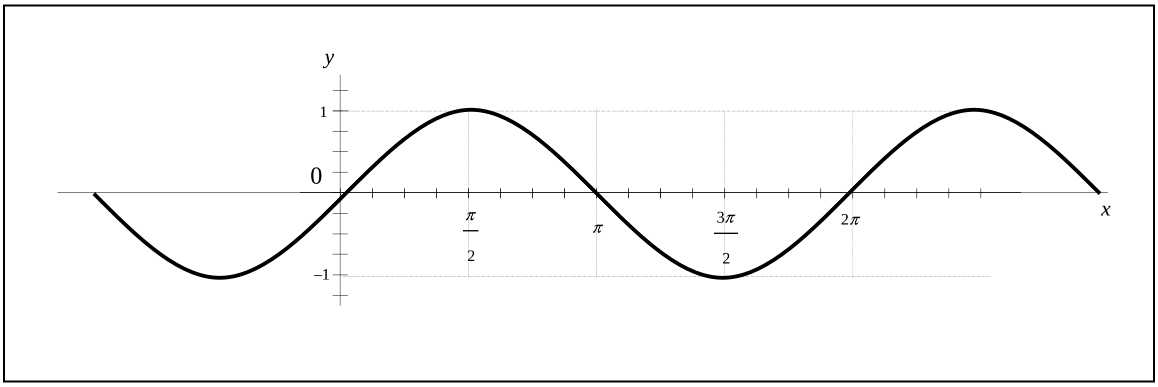

Figure 1.16

$domf = R$
$imf = [-1, 1]$
Parité : fonction impaire
Fonction périodique de période 2π .

h- Fonction cosinus

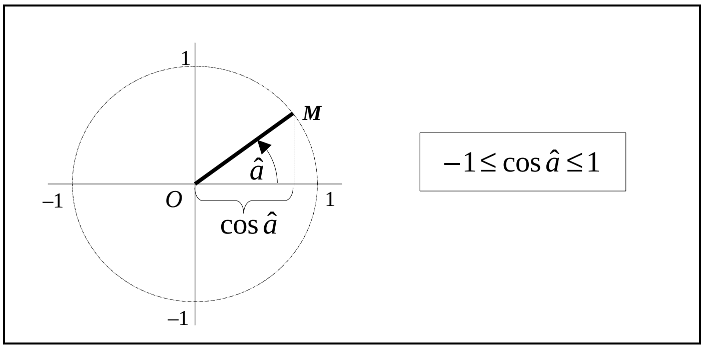

Figure 1.17

$$\boxed{f : x \to f(x) = \cos x} \qquad \text{où} \qquad \cos x = \cos \hat{a}$$

Si x est une mesure en *radians* de l'angle $\hat{a}$.

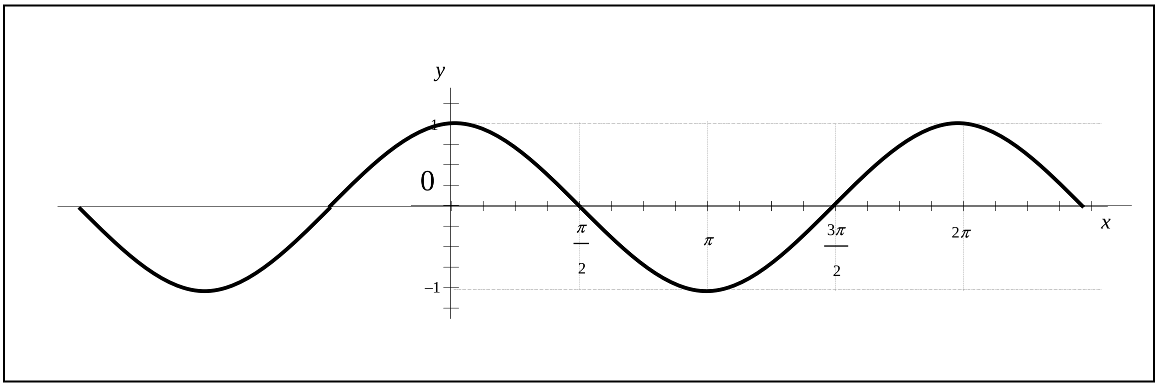

Figure 1.18

$domf = R$
$imf = [-1, 1]$
Parité : fonction paire
Fonction périodique de période 2π .

i- Fonction tangente

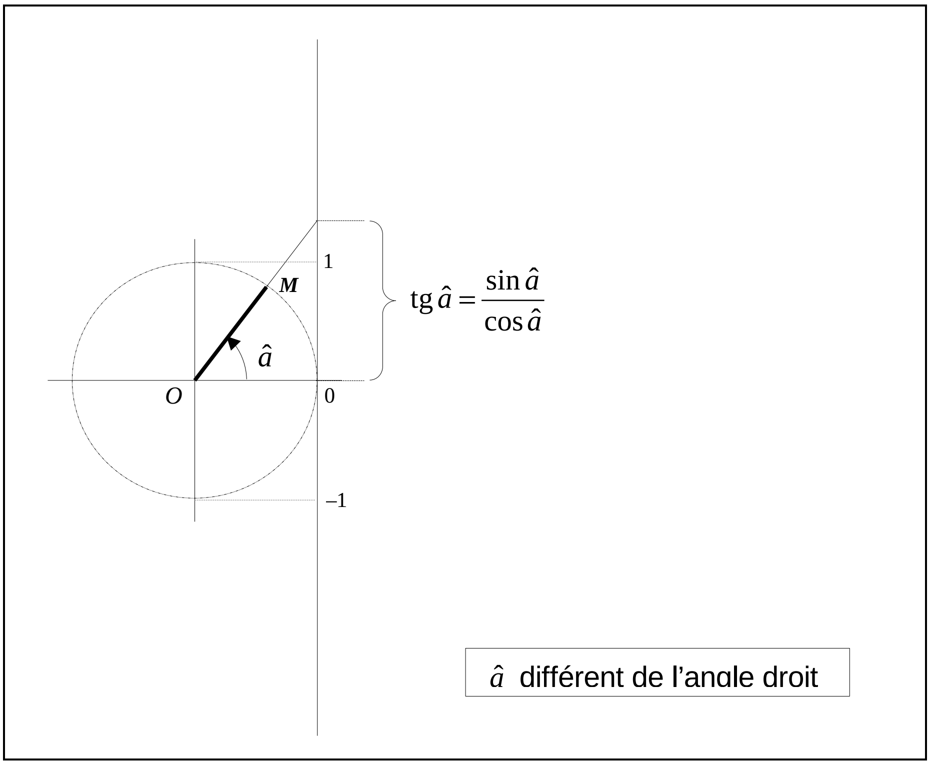

Figure 1.19

$$\boxed{f : x \to f(x) = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\,\hat{a}$$

Si x est une mesure en *radians* de l'angle $\hat{a}$.

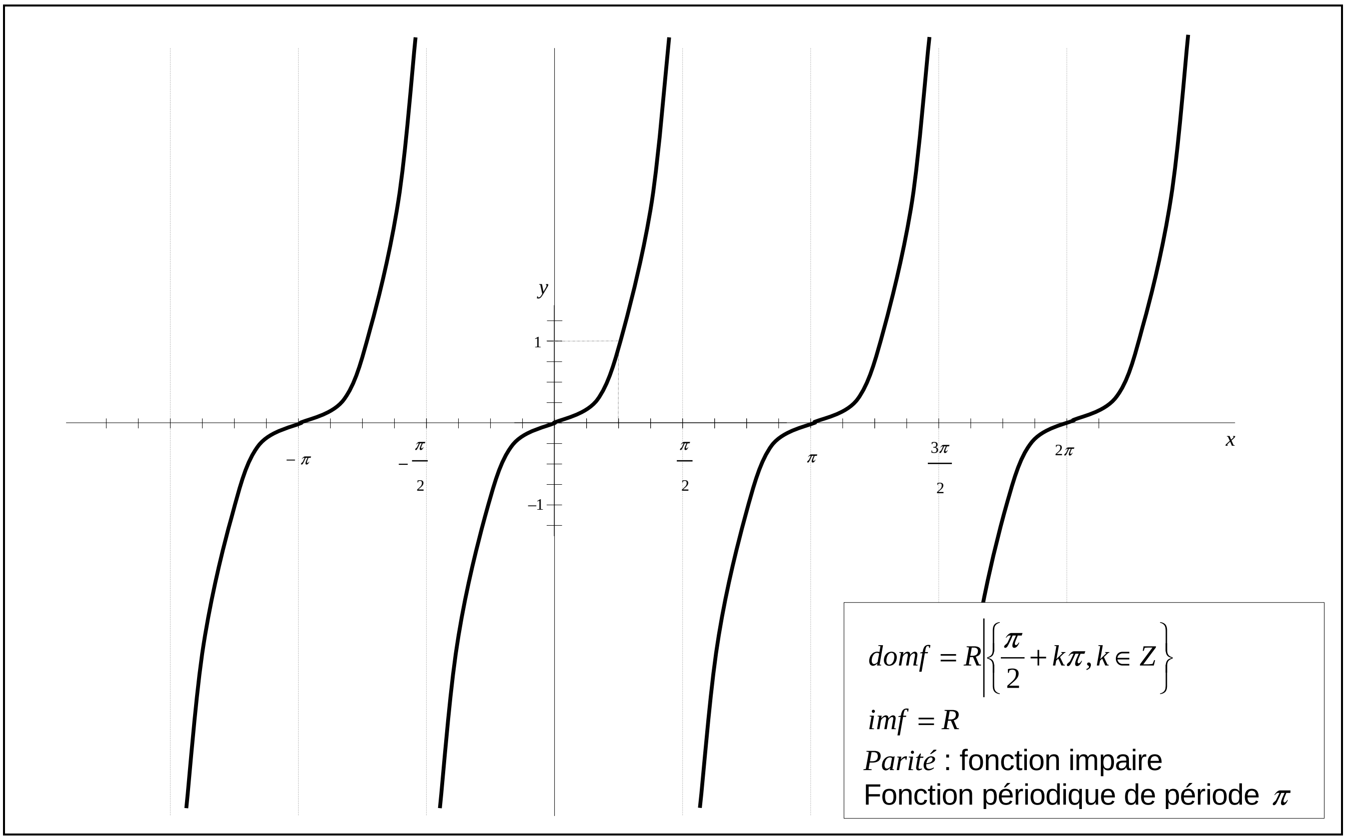

Figure 1.20