

# MATRICES & SYSTÈMES

Soit à résoudre les exercices suivants :

## Exemples

**1-** Déterminer  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour que la matrice devienne la matrice identité :

$$\square \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ z-1 & 1 & 2x+3y \\ x+y+z & 0 & z \end{pmatrix}$$

**2-** Calculer :

$$\square \begin{pmatrix} j & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - (j+1) \begin{pmatrix} 0 & j \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\square 3 \begin{pmatrix} 5j+1 & 10 \\ 2 & 4j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4j & 10 \\ -2 & -5j \end{pmatrix}$$

$$\square \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ j & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -j \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & j \end{pmatrix}$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ j & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & j & 9 \end{pmatrix}$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ j+1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1+j & 2 \\ 6 & j & 9 \end{pmatrix}$$

**3-** Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\square A = \begin{pmatrix} 1+j & 3 \\ j & j \end{pmatrix}$$

$$\square B = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\square C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\square D = \begin{pmatrix} j & 2 & -5j \\ 6 & 0 & -10 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\square E = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

**4-** Calculer en développant le long d'une rangée, le déterminant :

$$\square A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\square B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**5-** Calculer le déterminant en amenant le plus possible de zéros sur une rangée :

$$\square A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\square B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**5-** Résoudre les systèmes :

$$\square \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 9y + z = 1 \end{cases}$$

$$\square \begin{cases} 8x + 3y - z = 12 \\ 2x - y + z = -1 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$\square \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x + y = 3 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

## Exercices

$$\mathbf{1-}$$
 Soit :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$      $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$      $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ j & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad F = (5 \ 2 \ 3)$$

Calculer :  $\tilde{A}B$  ,  $3A^2$  ,  $AC$  ,  $(2A-3B)C$  ,  $DF$  ,  $F\tilde{B}$  ,  $CE+A$

**2-** Calculer le déterminant des matrices :

$$2.1- A = \begin{pmatrix} 1+j & 2j \\ 4 & 1-j \end{pmatrix}$$

$$2.2- B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} 1$$

$$2.3- C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.4- D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.5- E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**4-** Résoudre les systèmes suivants :

$$4.1- \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 8z = 4 \\ x + 3y + 27z = 9 \end{cases}$$

$$4.2- \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$4.3- \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - 2z = 4 \\ -2x + z = -1 \end{cases}$$

$$4.4- \begin{cases} x - y + 3u = 0 \\ 2x + y - z + 2u = 3 \\ y - 2z + u = -1 \\ -x + 2y + 3z + u = -2 \end{cases}$$

$$4.5- \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x + y = 3 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

## Réponses aux exercices

$$1- \tilde{A}.B = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 15 \\ -14 & 0 & -22 \\ 20 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$3A^2 = \begin{pmatrix} -21 & -12 & 84 \\ -42 & 93 & 24 \\ -48 & -18 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A.C = \begin{pmatrix} -18+2j & 18 \\ -6-5j & -21 \\ -31+j & 15 \end{pmatrix}$$

$$(2A-3B).C = \begin{pmatrix} -24+7j & 39 \\ 39-10j & -72 \\ -77-4j & 6 \end{pmatrix}$$

$$D.F = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 12 \\ -5 & -2 & -3 \\ 10 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$F.\tilde{B} = (19 \quad 35 \quad 1)$$

$$CE + A = \begin{pmatrix} 7 & -8+3j & -15 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 36-j & 24 \end{pmatrix}$$

$$2.1- \text{dtm}A = 2 - 8j$$

$$2.2- \text{dtm}B = 2$$

$$2.3- \text{dtm}C = 1$$

$$2.4- \text{dtm}D = 74$$

$$2.5- \text{dtm}E = 12$$

$$3.1- \text{dtm}A = 3 \neq 0$$

$$3.2- \text{dtm}B = 9 \neq 0$$

$$3.3- \text{dtm}C = 1$$

$$3.4- \text{dtm}D = 8$$

$$4.1- \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11}{6} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$4.2- \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$4.3- \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$4.4- \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -1 \\ u = -2 \end{cases}$$

$$4.5- \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$