2 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

I- Systèmes d'équations linéaires

Soit le système de m équations linéaires à n inconnues $x_1 , x_2 , ... , x_n$:

$$(S):\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il faut poser :

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & .... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système peut s'écrire (S): $AX = B$, puisque cette multiplication est possible au point de vue dimension.

Un tel système est dit *cramérien* si $m = n$. Si $m \neq n$, il est dit *non-cramérien*.

Lorsque le système est *non-cramérien* et qu'il contient plus d'équations que d'inconnues : $(m > n)$, il faut le rendre *cramérien*. Pour réaliser cette opération, il faut choisir n équations parmi les m proposées, résoudre le système *cramérien* ainsi obtenu, puis vérifier que les $(m-n)$ équations restantes admettent ou non la solution trouvée.

Par exemple, le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -2x - y = 7 \\ 4x + 9y = -2 \end{cases}$$

demande de résoudre, si c'est possible, le système allégé d'une des trois équations

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -2x - y = 7 \end{cases}$$

puis de vérifier que la solution est aussi celle de l'équation

$$4x+9y=-2$$

Si ce n'est pas le cas, le système ne possède pas de solution. La résolution du système peut aussi se faire avec un choix différent d'équations pour le calcul et pour la vérification.

Lorsque le système est *non-cramérien* et qu'il contient moins d'équations que d'inconnues $(m<n)$, il faut le rendre *cramérien* en écrivant $(n-m)$ inconnues dans le second membre. Le système obtenu est résolu et est toujours indéterminé, dépendant de $(n-m)$ paramètres, ou il est impossible.

Ainsi, le système suivant :

$$\begin{cases} 4x-9y+6z=4 \\ -3x+5y+z=-7 \end{cases}$$

est transformé, par exemple, en

$$\begin{cases} 4x-9y=4-6z \\ -3x+5y=-7-z \end{cases}$$

Il est alors résolu pour trouver, si elle existe, la solution en fonction d'un paramètre λ $(z=\lambda)$.

II- Méthode de résolution d'un système *cramérien* ou rendu *cramérien*

1- Méthode des combinaisons linéaires

Cette méthode consiste à éliminer successivement, par combinaison linéaire entre les lignes du système, les inconnues des équations. Le but est d'obtenir une première équation à une inconnue, puis une deuxième équation à deux inconnues, ensuite une troisième équation à trois inconnues et ainsi de suite… L'exemple suivant permet d'illustrer cette façon de faire :

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$$

Il faut procéder de la façon énoncée : éliminer, par combinaison linéaire entre les lignes, l'inconnue z dans les deux premières équations, puis éliminer y de la première équation ainsi obtenue.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 3 \\ -5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \to L_1-3L_2 : \\ L_2 \to 4L_2+L_3 : \\ L_3 : \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-3.2 & 2-3(-1) & 3-3.1 \\ 4.2+3 & 4.(-1)+2 & 4.1-4 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14-3.3 \\ 4.3-5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 11 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$L'_1 \to 2L'_1 + 5L'_2 \quad \begin{pmatrix} 2.(-5)5.11 & 2.5+5(-2) & 0 \\ 11 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5+5.7 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Et le système est devenu :

$$\begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 45x = 45 \\ 11x - 2y = 7 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = 11 - 7 \\ 4z = 3x + 2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

2- Méthode des déterminants de *Cramer*

Puisque le système a été rendu *cramérien*, et est écrit sous la forme : $AX = B$ avec A carrée, il est possible de calculer $dtm\,A$, appelé *déterminant du système*. La méthode est ici expliquée sur un système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

mais peut se généraliser à un système carré quelconque.

Si $dtm\,A \neq 0$, le système $AX = B$ possède une seule solution

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

calculée comme suit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{dtmA} \\ y = \dfrac{D_y}{dtmA} \\ z = \dfrac{D_z}{dtmA} \end{cases}$$

si D_x est le déterminant du tableau obtenu en remplaçant dans A la colonne des coefficients de x par la colonne B des termes indépendants, les autres colonnes restant inchangées

$$D_x = dtm\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

D_y le déterminant du tableau obtenu en remplaçant dans A la colonne des coefficients de y par la colonne B, les autres colonnes restant inchangées, et D_z celui du tableau obtenu en remplaçant dans A la colonne des coefficients de z par la colonne B, les autres colonnes restant inchangées

$$D_y = dtm\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad D_z = dtm\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Par exemple :

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad AX = B \quad \text{avec } dtm\ A = 45$$

$$D_x = dtm\begin{pmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{45} = 1$$

$$D_y = dtm\begin{pmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{45} = 2$$

$$D_z = dtm\begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 135 \Rightarrow z = \frac{135}{45} = 3$$

et

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un deuxième exemple :

$$(S): \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Il faut rendre le système *cramérien* en choisissant deux équations parmi les trois du système proposé.

L'une des possibilités donne :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \quad . X \; = \; B$$

Ce dernier système donne la solution :

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que X est aussi la solution de l'équation abandonnée : $2x+y=4$, qui devient $2.1+2=4$ et X est la solution du système de départ.

3- Méthode de la matrice inverse

Puisque le système a été rendu *cramérien*, et est écrit sous la forme : $AX=B$ avec A carrée, il est possible de calculer $dtm\ A$.

Premier cas : $dtm\ A\neq 0$

Si $dtm\ A\neq 0$, la matrice A possède une matrice inverse A^{-1}. En conséquence, en multipliant, à gauche, les deux membres de l'équation matricielle $AX=B$ par la matrice, il vient A^{-1} :

$$A^{-1}.AX = A^{-1}.B$$

donc

$$IX = A^{-1}.B$$

ou

$$X = A^{-1}.B$$

et le système (S) possède une et une seule solution.

Deuxième cas : $dtm\ A=0$

Il existe une combinaison linéaire entre les lignes de la matrice A. Deux cas peuvent se présenter :

- La combinaison linéaire existante entre les lignes de A n'existe pas entre les termes indépendants (B), le système (S) est alors impossible et ne possède pas de solution.
- La combinaison linéaire existant entre les lignes de A existe entre les termes indépendants (B), le système (S) est alors indéterminé et possède une infinité de solutions.

Exemples

Premier exemple

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad AX = B$ avec $dtm\ A = 45$

$$A^{-1} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 7 \\ 14 & -13 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

et $X = A^{-1}.B$

$$X = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 2 & 14 & 5 \\ 11 & -13 & 5 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Deuxième exemple

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \quad . \ X \ = \ B$$

$dtm\ A = 0$

Or, dans la matrice, $L_1 = -L_2 - L_3$, combinaison linéaire qui se reporte sur les seconds membres : $1 = -2 - (-3)$ conduit au fait que le système est indéterminé.

Troisième exemple

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \quad . \ X \ = \ B$$

$dtm\ A = 0$ et, dans ce cas, la combinaison linéaire qui apparaît dans la matrice, $L_1 = -L_2 - L_3$, ne se reporte pas sur les seconds membres : $1 \neq -0 - (-3)$. Le système est impossible et ne possède pas de solution.