



MATRICES & DÉTERMINANTS

I- Matrices

Introduction

Les résultats aux examens de trois étudiants sont donnés dans le tableau suivant :

	ETUDE DE LOGICIELS	MATH	ELECTRONIQUE
Jean	57	84	90
Marc	63	71	50
Arnaud	95	76	90

Qui pourrait s'écrire simplement sous la forme de tableau :

57	84	90
63	71	50
95	76	90

Définitions et notations

Un tableau rectangulaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ avec } a_{ij} \in R \text{ ou } a_{ij} \in C$$

est appelé matrice $m \times n$. Elle est notée A ou (a_{ij}) . Elle comporte m lignes de n nombres (réels ou complexes) ou n colonnes de m nombres (réels ou complexes). Les lignes ou les colonnes de la matrice sont les rangées de la matrice.

Le terme général a_{ij} dépend donc de deux indices : i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne de l'élément a_{ij} .

Si $m = n$, c'est-à-dire si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes, la matrice est dite *carrée*. Le nombre de lignes (ou de colonnes) est alors la *dimension* de la matrice.

Une matrice carrée possède deux diagonales. La *diagonale principale* est celle qui part du coin supérieur gauche vers le coin inférieur droit. Les *éléments diagonaux* sont les éléments de la diagonale principale.

Egalité de deux matrices

Deux matrices $m \times n$ sont égales si les éléments correspondants sont égaux deux à deux :

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (a_{ij}) = (b_{ij}) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire $m \cdot n$ égalités de nombres.

Matrices particulières

La matrice *nulle* $m \times n$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Elle est notée 0 .

Une matrice carrée est *diagonale* si tous les éléments non diagonaux sont nuls :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 5-j \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée est *triangulaire* supérieure (ou inférieure) si tous les éléments situés en dessous (ou au-dessus) de la diagonale principale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} 4 & j & -2 \\ 0 & 1+j & -1+4j \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ est une } \textit{triangulaire supérieure de dimension 3}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1+4j & 9 & 0 \\ 6j & 7 & j \end{pmatrix} \text{ est une } \textit{triangulaire inférieure de dimension 3}$$

La matrice identité est la matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1. La matrice identité de dimension n est notée I_n .

Exemple :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la } \textit{matrice identité de dimension 3}$$

Une *matrice ligne* est une matrice constituée d'une seule ligne.

Une *matrice colonne* est une matrice constituée d'une seule colonne.

Une matrice $m \times n$ peut ainsi s'écrire :

$$A = (C_1 \quad \dots \quad C_n) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & j \\ -4j & 3 & 2+j \end{pmatrix} = (C_1 \quad C_2 \quad C_3) \text{ avec } C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4j \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} j \\ 2+j \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \text{ avec } L_1 = (1 \quad 2 \quad j), L_2 = (-4j \quad 3 \quad 2+j)$$

Matrices associées à une matrice $m \times n$: $A = (a_{ij})$

Matrice transposée

La transposée de A est la matrice $n \times m$ obtenue en prenant pour lignes les colonnes de A (et donc pour colonnes les lignes de A). Elle est notée \tilde{A} .

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow \tilde{A} = (a_{ji}) \\ m \times n \quad n \times m$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5j & 2 \\ 2+3j & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3j \\ 5j & -3 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice conjuguée

La matrice conjuguée de A est la matrice $m \times n$ dont les éléments sont les conjugués des éléments de A , elle est notée \bar{A} .

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$$

$A = \bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$ est une matrice réelle.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3-j & 2 \\ j & -1+5j \end{pmatrix} \text{ et } \bar{A} = \begin{pmatrix} 3+j & 2 \\ -j & -1-5j \end{pmatrix}$$

La matrice adjointe

La matrice adjointe de A , notée A^* , est définie par

$$A^* = \bar{\tilde{A}} \quad (\text{ou } A^* = \tilde{\bar{A}})$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3-j & 2 \\ j & -1+5j \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3+j & -j \\ 2 & -1-5j \end{pmatrix}$$

Addition de matrices de même genre

Soient A et B , deux matrices $m \times n$. La somme de A et B est la matrice $m \times n$ obtenue en additionnant les termes correspondants de A et B .

Exemple :

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 6 & 0 \\ 5 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Propriétés

Si les matrices sont $m \times n$:

$$1- A+0=0+A$$

$$2- A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$$

$$3- A+B=B+A$$

La différence de A et B est la matrice $m \times n$ définie par :

$$A-B=A+(-1)B$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5j \\ 2+j & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4j & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4j & -3+5j \\ j & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un nombre réel ou complexe

Soit A , une matrice $m \times n$. Le produit de A par un nombre réel ou complexe est la matrice $m \times n$ obtenue en multipliant chaque terme de A par ce nombre.

$$rA = r(a_{ij}) = (ra_{ij})$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5j \\ 2+j & -3 \end{pmatrix} ; \quad 5A = \begin{pmatrix} 5 & 25j \\ 10+5j & -15 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$1- p(qA) = (pq)A$$

$$2- (p + q)A = pA + qA$$

$$3- p(A + B) = pA + pB$$

Multiplication d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$

Soient A de genre $m \times n$ et B de genre $n \times p$.

Le produit de A par B est la matrice $m \times p$ telle que son élément c_{ij} est la somme des produits termes à termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B , (produit ligne par colonne).

Premier exemple :

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1/4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1/4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1/4 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1) + 1/2 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 29/4 \\ 15 & 3/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deuxième exemple :

$$A_{1 \times 3} = \left(4 \quad 5j \quad -1/2 \right) \quad ; \quad B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10j \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B_{1 \times 1} &= \left(4 \quad 5j \quad -1/2 \right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10j \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= 28 + 50j^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -22 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Troisième exemple :

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriétés

Pour autant que A, B, C soient des matrices de dimensions convenables :

- 1- $A.(B+C) = A.B + A.C$
- 2- $(A+B).C = A.C + B.C$
- 3- $k(A.B) = (kA).B = A.(kB)$
- 4- $A.I_n = I_m.A = A$ si A est $m \times n$
- 5- $(A.B).C = A.(B.C)$

Première remarque

Le plus souvent $A.B \neq B.A$ car les dimensions ne sont pas nécessairement compatibles. Même si les matrices sont carrées et de même dimension, le produit est le plus souvent non commutatif :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deuxième remarque

Si $A.B = 0$, cela n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Troisième remarque

$$\overline{A.B} = \overline{A}.\overline{B} \quad ; \quad A.B = \tilde{B}.\tilde{A} \quad ; \quad (A.B)^* = B^*.A^*$$

II- Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée de dimension 2

La matrice est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est le nombre noté :

$$\begin{aligned} \text{dtm } A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

Déterminant d'une matrice carrée de dimension 3

La matrice a la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est le nombre noté :

$$\text{dtm } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant peut se calculer par la méthode de **Sarrus**.

L'opération consiste à reproduire les deux premières colonnes à la suite de la troisième et à effectuer les produits croisés comme le montre le tableau ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\text{dtm } A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Définition d'un déterminant

Le *déterminant* d'une matrice de dimension 1 est égal à son seul élément.

Si A est une *matrice carrée* de dimension m où $m \geq 2$, son déterminant est le nombre obtenu en additionnant les produits des éléments d'une rangée par les mineurs algébriques associés à chacun de ces éléments.

Le *mineur algébrique* d'un élément a_{ij} d'une matrice A est noté A_{ij} et est égal au produit de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne du tableau A .

Avec cette définition, calculer le déterminant d'ordre m d'une matrice de dimension m revient à calculer successivement des déterminants d'ordre $m-1$, puis d'ordre $m-2, \dots$ jusqu'à des déterminants d'ordre 2.

Ainsi, l'exemple suivant clarifie la définition :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{dtm } A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} |4| = 4$$

$$a_{12} = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} |2| = -2$$

Donc, en choisissant la première ligne pour développer le déterminant, il vient $\det A = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2$.

En sélectionnant la deuxième colonne, $\det A = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 2$ puisque

$$a_{22} = 4 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} |1| = 1$$

Etc.

La **règle des produits en croix** se retrouve donc bien avec cette méthode.

Dans le cas de la matrice $A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, pour calculer $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, il est préférable de choisir la

deuxième colonne. En effet, un seul élément de cette colonne est non nul, un seul mineur doit donc être calculé.

Ainsi :

$$a_{22} = 1 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$$

et

$$\det A = 0 + (-6) = -6$$

Le résultat est encore le même que par la règle de **Sarrus**.

Pour calculer le déterminant de la matrice de *dimension 4* :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident qu'il faut choisir la dernière colonne. Ainsi :

$$a_{24} = 4 \quad A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Le mineur d'un élément d'un déterminant d'ordre 4 est toujours un déterminant d'ordre 3. En choisissant par exemple la dernière ligne, il faut effectuer les calculs suivants :

$$a'_{31} = 4 \quad A'_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 0 = 25$$

$$a'_{32} = 1 \quad A'_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 3) = -2$$

$$\text{et } A_{24} = 4 \cdot 25 + 1 \cdot (-2) = 98$$

Le déterminant $\det A$ vaut donc $4 \cdot A_{24} = 4 \cdot 98 = 392$

Remarques

Si tous les éléments d'une rangée sont nuls, le déterminant est nul.

Le déterminant d'une matrice triangulaire (en particulier d'une matrice diagonale) est le produit des éléments diagonaux. Par exemple : $\text{dtm } I_n = 1$.

Propriétés des déterminants

1- $\text{dtm } \bar{A} = \text{dtm } A$

2- $\text{dtm } \tilde{A} = \text{dtm } A$

3- $\text{dtm } A^* = \text{dtm } A$

4- La permutation de deux rangées parallèles change le signe du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

5- Le déterminant d'une matrice qui possède deux rangées identiques est nul si ces rangées sont parallèles :

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

6- Pour multiplier un déterminant par un nombre, il suffit de multiplier tous les éléments d'une rangée par ce nombre. Réciproquement, on pourra mettre en évidence un facteur commun à tous les éléments d'une rangée.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 25 & -4 \\ 3 & 4 & 50 & -7 \\ 4 & 2 & 75 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 25 & -4 \\ 3 & 2 & 50 & -7 \\ 4 & 1 & 75 & -9 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 10 & -7 \\ 4 & 1 & 15 & -9 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 4 & 1 & 15 & 9 \end{vmatrix}$$

7- La valeur d'un déterminant ne change pas quand est ajoutée à une rangée, une combinaison linéaire des autres rangées parallèles.

8- $\text{dtm } (A.B) = \text{dtm } A \cdot \text{dtm } B$

Ces propriétés permettent de simplifier le calcul d'un déterminant. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de rangées parallèles identiques, il n'y a pas de mise en évidence possible. Il faut alors faire apparaître un ou des « 0 » pour faciliter le calcul du déterminant en utilisant l'avant dernière propriété énoncée ci-dessus. En faisant les transformations :

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - L_1$$

$$L_4 \rightarrow L_4 - L_1$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} + 0 + 0 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En mettant ensuite 2 et 3 en évidence respectivement sur la deuxième et la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 13 \\ 1 & 5 & 21 \end{vmatrix} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 14 \end{vmatrix} \quad \text{en faisant } L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ &= 6 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (14 - 12) \\ &= 12 \end{aligned}$$

III- L'inverse d'une matrice

Les matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices identité : $I.A = A.I = A$.

La matrice inverse d'une matrice donnée A existe si A est carrée et $\det A \neq 0$.

Dans ces conditions, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})$, où, A_{ij} est un mineur algébrique associé à l'élément a_{ij} de A , est l'inverse de A , c'est-à-dire : est telle que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.

Exemples

Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à 99. La matrice inverse de A existe donc et est

la matrice :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{99} \begin{pmatrix} 2-24 & -(5+6) & 20+2 \\ -(3-28) & 1+7 & -(4+3) \\ 18-14 & -(6-35) & 2-15 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -11 & 22 \\ 25 & 8 & -7 \\ 4 & 29 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut vérifier que $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & 25 & 4 \\ -11 & 8 & 29 \\ 22 & -7 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{99} \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 99 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

Il peut être vérifié de la même façon que $A \cdot A^{-1} = I$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour déterminant : 13.

B^{-1} existe donc et est donnée par :

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^{-1} \cdot B &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

Table des matières

I- Matrices 2

Introduction 2

Définitions et notations 2

Egalité de deux matrices 3

Matrices particulières 3

Matrices associées à une matrice $m \times n : A = (a_{ij})$ 4

Matrice transposée 4

La matrice conjuguée 4

La matrice adjointe 4

Addition de matrices de même genre 5

Propriétés 5

Multiplication par un nombre réel ou complexe 5

Propriétés 6

Multiplication d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$ 6

Propriétés 7

Première remarque 7

Deuxième remarque 7

Troisième remarque 7

II- Déterminant d'une matrice carrée 7

Déterminant d'une matrice carrée de dimension 2 7

Déterminant d'une matrice carrée de dimension 3 8

Définition d'un déterminant 8

Remarques 9

Propriétés des déterminants 10

III- L'inverse d'une matrice 11

Exemples 12