1 LES NOMBRES COMPLEXES

I- Introduction

Une équation du second degré du type $x^2+3x+5=0$ ne possède pas de solution réelle puisque $\Delta=-11<0$. L'introduction de nombres appelés « *nombres complexes* » permet par exemple, dans le cas d'une telle équation, de trouver des solutions « *complexes* ».

II- Définitions

Un nombre complexe est un couple (a,b) de nombres réels qui satisfait aux quatre axiomes suivants :

- Addition de deux nombres complexes - $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$.
- Multiplication de deux nombres complexes - $(a,b).(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)$.
- Multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel k - $k(a,b)=(ka,kb)$.
- L'inverse d'un nombre complexe $(a,b)\neq(0,0)$ est noté $(a,b)^{-1}$ et donné par $(a,b)^{-1}=\dfrac{(a,-b)}{a^2+b^2}$.

Les nombres complexes sont souvent appelés z.

$z=(a,b)$ est l'écriture axiomatique du nombre complexe z dont :

- a est la partie réelle, la partie réelle de z peut être notée $\Re z$.
- b est la partie imaginaire, la partie imaginaire de z peut être notée $\Im z$.

Les parties réelle et imaginaire sont des nombres réels. L'ensemble des nombres complexes est noté C.

III- Les nombres complexes particuliers

$0=(0,0)$ est neutre pour l'addition dans C :

$$\boxed{0+z=z=z+0}$$

$$\begin{aligned} 0+z &= (0,0)+(a,b) \\ &= (0+a,0+b) && \text{par le premier axiome} \\ &= (a,b) && 0 \text{ est neutre pour l'addition dans } R \\ &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z+0 &= (a,b)+(0,0) \\ &= (a+0,b+0) && \text{par le premier axiome} \\ &= (a,b) && 0 \text{ est neutre pour l'addition dans } R \\ &= z \end{aligned}$$

$e=(1,0)$ est neutre pour la multiplication dans C :

$$\boxed{z.e = e.z = z}$$

$$\begin{aligned} z.e &= (a,b).(1,0) \\ &= (a.1-b.0, a.0+1.b) && \text{par le deuxième axiome} \\ &= (a,b) \\ &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e.z &= (1,0).(a,b) \\ &= (1.a-0.b, 1.b+0.a) && \text{par le deuxième axiome} \\ &= (a,b) \\ &= z \end{aligned}$$

$(0,b)$ est appelé « nombre imaginaire » : sa partie réelle est nulle.

$(0,1)=j$ est un nombre imaginaire tel que :

$$\boxed{j^2 = -e}$$

$$\begin{aligned} j^2 &= (0,1).(0,1) \\ &= (0.0-1.1, 0.1+1.0) && \text{par le deuxième axiome} \\ &= (-1,0) \\ &= -(1,0) && \text{par le troisième axiome} \\ &= -e \end{aligned}$$

$(a,0)$ est un nombre complexe qui se comporte comme sa partie réelle :

- $(a,0)+(a',0)=(a+a',0)$
- $\begin{aligned} (a,0).(a',0) &= (a.a'-0.0, a.0+a'.0) \\ &= (a.a',0) \end{aligned}$
- $k(a,0)=(ka,0), k\in R$
- $\begin{aligned} (a,0)^{-1} &= \frac{(a,-0)}{a^2+0^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2},0\right) \\ &= \left(\frac{1}{a},0\right) && \text{avec } a\neq 0 \end{aligned}$

En conclusion, ces nombres permettent d'établir une correspondance entre l'algèbre des réels et l'algèbre des complexes et de prendre la convention suivante :

Un nombre réel r est assimilé à un nombre complexe $(r,0)$ et réciproquement un nombre complexe $(r,0)$ est assimilé à un nombre réel r .

Ainsi : $(0,0)=0$, $(1,0)=1$, $(-3,0)=-3$, …

IV- Ecriture algébrique d'un nombre complexe

En tenant compte de la convention précédente, un nombre complexe $z=(a,b)$ peut s'écrire sous forme d'écriture algébrique $z=a+jb$, j étant le nombre complexe $(0,1)$:

$$\boxed{z=(a,b)=a+jb}$$

En effet :

$$\begin{aligned} z &= a+jb \\ &= (a,0)+(0,1).(b,0) && \text{par convention} \\ &= (a,0)+(0.b-1.0,0.0+1.b) && \text{par le deuxième axiome} \\ &= (a,0)+(0,b) \\ &= (a+0,0+b) && \text{par le premier axiome} \\ &= (a,b) \\ &= z \end{aligned}$$

V- Propriété de $j=(0,1)$

$$\boxed{j^2=-1}$$

En effet :

$$\begin{aligned} j^2 &= (0,1).(0,1) \\ &= (0.0-1.1,0.1+1.0) && \text{par le deuxième axiome} \\ &= (-1,0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} j^1 &= j \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= j^2.j=-j \\ j^4 &= j^2.j^2=-1.-1=1 \end{aligned}$$

Plus généralement :

$$j^{4k} = 1$$
$$j^{4k+1} = j$$
$$j^{4k+2} = -1$$
$$j^{4k+3} = -j \quad \text{avec} \quad k \in N$$

Ceci simplifie les calculs puisqu'il est possible dorénavant d'utiliser les règles d'algèbre habituelle au lieu des axiomes.

Exemples

$$\begin{aligned}(-1{,}5).(4{,}2) &= (-1+5j).(4+2j) \\ &= -4+20j-2j+10j^2 \\ &= -4+18j-10 \\ &= -14+18j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3.(2,-4).(1{,}0) &= 3.(2-4j).1 \\ &= 6-12j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5{,}4).(5,-4) &= (5+4j).(5-4j) \\ &= 5^2-(4j)^2 \\ &= 25-16j^2 \\ &= 25+16 \\ &= 41\end{aligned}$$

VI- Grandeurs associées à un nombre complexe $z=(a,b)= a+ j\, b$

Le conjugué de z

Noté $\bar{z}$, défini par $\bar{z} = (a,-b) = a - jb$

Exemple

$$z = (1,-5) = 1-5j \Rightarrow \bar{z} = (1{,}5) = 1+5j$$

Propriétés (à vérifier)

$$\bar{\bar{z}} = z$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{k.z} = k\,.\,\bar{z}$$
$$\overline{z_1\,.\,z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

Le module de z

Noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Exemple

$$z = (2,-3) = 2 - 3j \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Propriétés (à vérifier)

$$|z| = |\bar{z}|$$
$$z.\bar{z} = |z|^2$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$|k.z| = |k|.|z|$$
$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$
$$z^{-1} = (a,b)^{-1} = \frac{(a,-b)}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

VII- Quotient de deux nombres complexes

Le quotient des nombres complexes z_1 et z_2 avec $z_2 \neq 0$ est :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\frac{1}{z_2} = z_1.\, z_2^{-1} = z_1.\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}}$$

Pratiquement, pour diviser un nombre complexe z_1 par un nombre complexe z_2, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple

$$z_1 = 6 - 2j \text{ et } z_2 = 1 + j$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{6-2j}{1+j} \\ &= \frac{(6-2j).(1-j)}{(1+j).(1-j)} \\ &= \frac{6-2j-6j+2j^2}{1-j^2} \\ &= \frac{4-8j}{1+1} \\ &= \frac{4-8j}{2} \\ &= 2-4j\end{aligned}$$

VIII- Représentation géométrique de C

Puisque l'ensemble C des nombres complexes est par définition l'ensemble des couples de nombres réels, toute représentation géométrique de R^2 est aussi une représentation géométrique de C.

Or, à tout couple (a,b) de nombres réels correspond un, et un seul point, du plan muni d'un repère cartésien, le point P de coordonnées (a,b), et inversement.

Ainsi, dans un plan muni d'un repère orthonormé, à tout élément z de C, il est possible d'associer un point Z dont les coordonnées sont respectivement les parties réelle et imaginaire de z, comme le montre la *figure* 1.1.

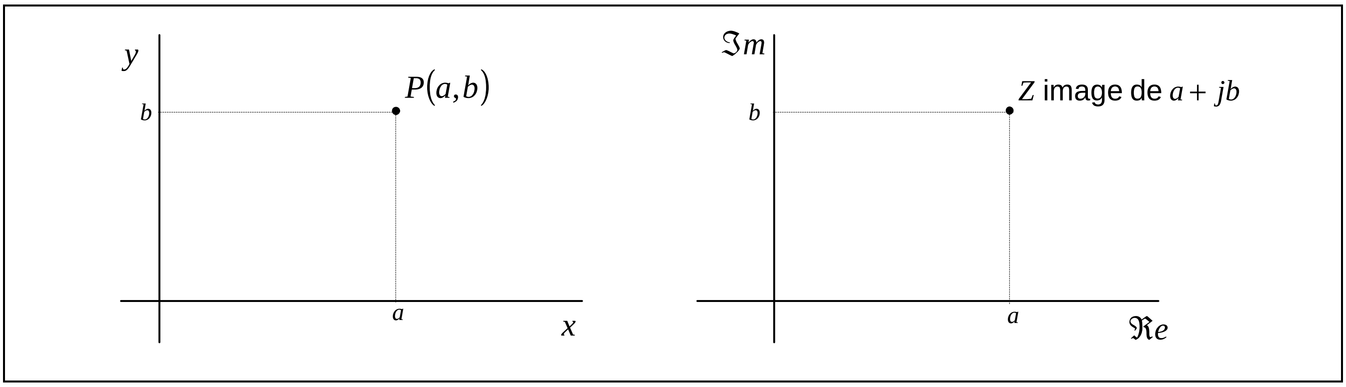


Figure 1.1

Lorsque le plan muni d'un repère orthonormé représente l'ensemble des nombres complexes, il prend le nom de plan de ***Gauss***, plan d***'Argand-Cauchy*** ou plan complexe. L'axe horizontal porte alors le nom d'axe réel et l'axe vertical celui d'axe imaginaire.

Certains éléments et certaines opérations peuvent se représenter facilement par une construction géométrique dans le plan complexe. La *figure* 1.2 reprend l'**opposé** et le **conjugué** pour le dessin de gauche, le **module** est repris sur celui de droite.

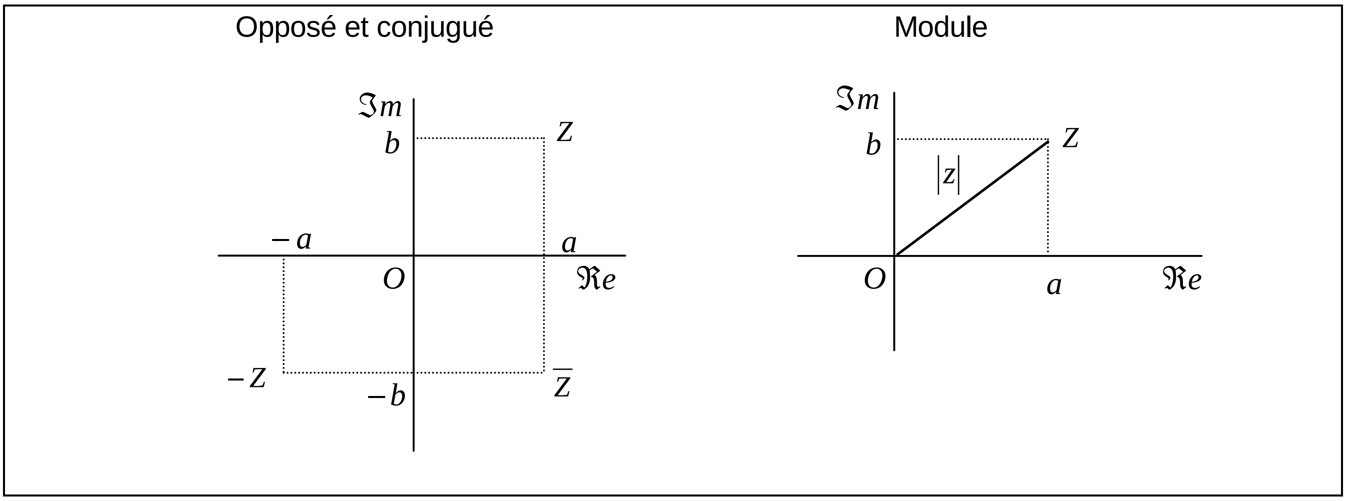


Figure 1.2

La *figure* 1.3 montre la façon de représenter une **somme**.

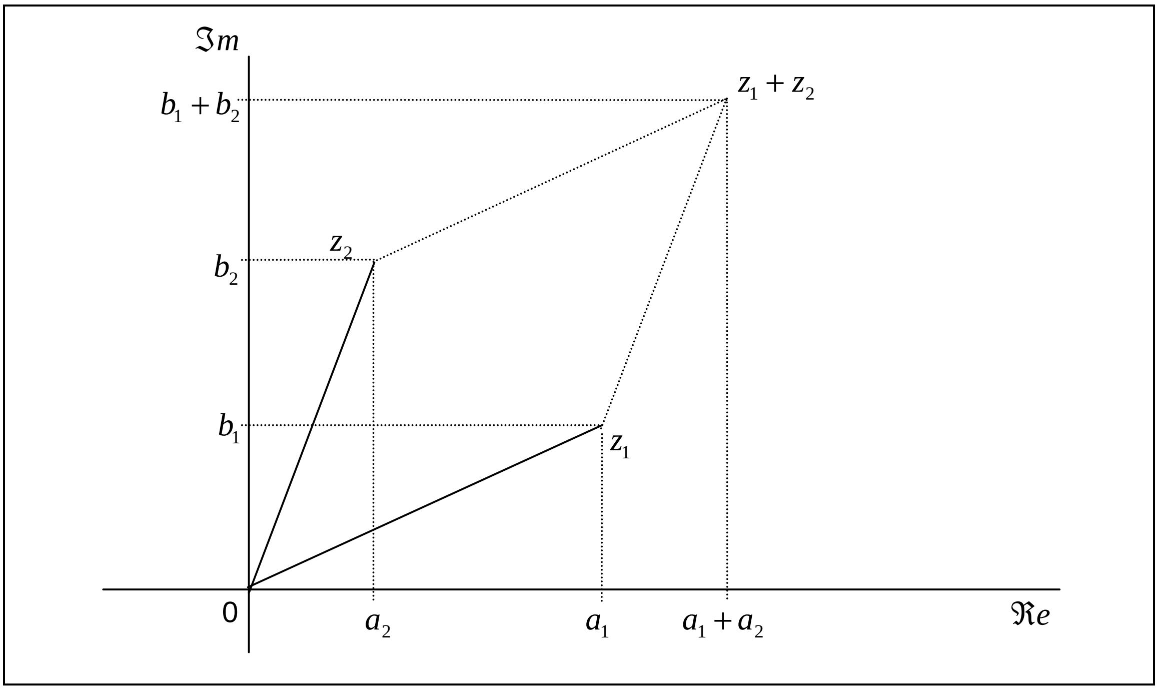
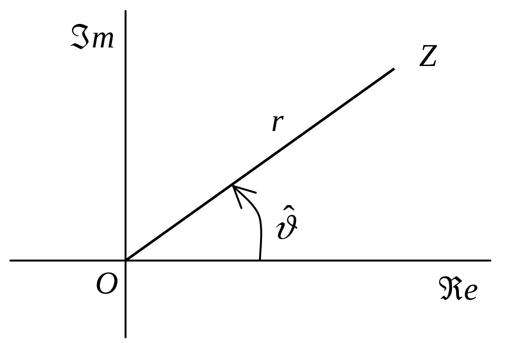


Figure 1.3

IX- Forme trigonométrique (ou polaire) d'un nombre complexe

Coordonnées polaires

Un nombre complexe quelconque $z = (a,b) = a + jb$ a pour image un point Z de coordonnées rectangulaires (a,b). Mais n'importe quel point du plan peut être représenté par ses coordonnées polaires (r,ϑ) avec $r \geq 0$. La *figure* 1.4 reprend cette configuration.



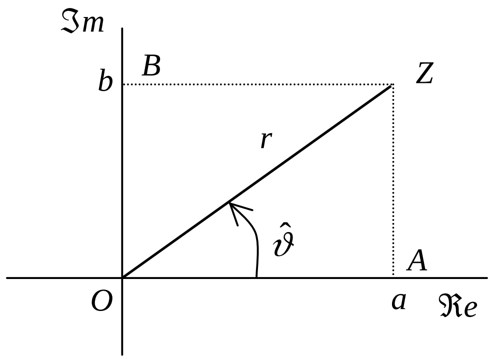
r est la mesure du segment $[0,Z]$

ϑ est la mesure de l'angle orienté $\hat{\vartheta}$

Figure 1.4

Passage des coordonnées rectangulaires (a,b) aux coordonnées polaires (r,ϑ)

Soit à considérer la *figure* 1.5, elle se distingue de la précédente par les coordonnées du point Z .



Z est le point image de $z=(a,b)=a+jb$

Figure 1.5

Calcul de r : OZA est un triangle rectangle en A. Ainsi, le théorème de ***Pythagore*** permet d'écrire :

$$
\begin{aligned}
|OZ|^2 &= |OA|^2 + |AZ|^2 \\
&= |OA|^2 + |OB|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 &= a^2 + b^2 \\
r &= \pm\sqrt{a^2+b^2} \\
r &= +\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{car } r \geq 0 \\
\text{ou} \quad r &= |z|
\end{aligned}
$$

Calcul de ϑ : OZA est un triangle rectangle en A. Ainsi :

$$|OA| = |OZ|.\cos\vartheta \quad \text{ou} \quad a = r\cos\vartheta \qquad (1)$$
$$|OB| = |OZ|.\sin\vartheta \quad \text{ou} \quad b = r\sin\vartheta \qquad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{r\sin\vartheta}{r\cos\vartheta} \qquad \text{si } a \neq 0, \cos\vartheta \neq 0 \text{ et } r \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = tg\,\vartheta$$

$$\Rightarrow \vartheta = arctg\frac{b}{a} \text{ ou } \vartheta = \pi + arctg\frac{b}{a} \qquad \text{suivant la position du point } Z \text{ dans le repère.}$$

Remarque

Si $a=0$, $z=(0,b)=jb$ est représenté par un point $Z\left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)$ ou $Z'\left(\vartheta=-\frac{\pi}{2}\right)$ de l'axe $\Im m$ et $r=|OZ|=|b|$, la *figure* 1.6 l'atteste.

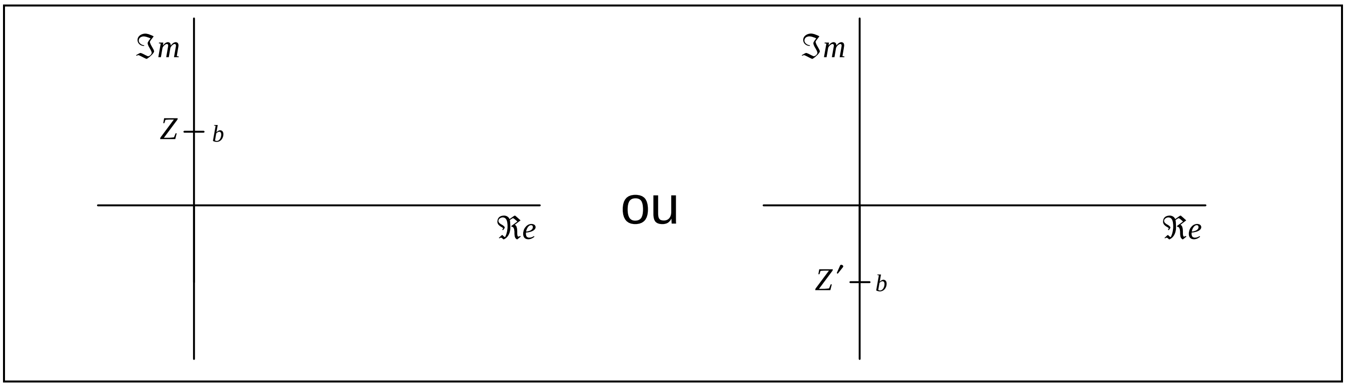


Figure 1.6

Passage des coordonnées polaires (r,ϑ) aux coordonnées rectangulaires (a,b)

Soit à considérer le triangle OZA rectangle en A, dans la *figure* 1.7.

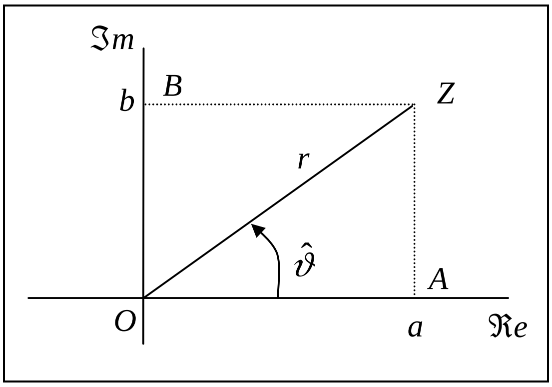


Figure 1.7

Une double égalité peut-être mise en évidence : $\begin{cases} a = r\cos\vartheta \\ b = r\sin\vartheta \end{cases}$

Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe

Si $z = a + jb$ et $a = r\cos\vartheta$
$b = r\sin\vartheta$

Il est donc possible d'écrire z sous sa forme trigonométrique.

$z = r\cos\vartheta + jr\sin\vartheta$ ou $z = r(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$ ou $z = r.cis\,\vartheta$ ou encore $z = r\angle\vartheta$

ϑ est appelé « argument » de z et r est le module de z.

Formes trigonométriques de z

Le nombre complexe z, de forme algébrique $z = a + jb$, peut s'écrire sous forme trigonométrique :

$$\boxed{z = r\cos\theta + jr\sin\theta \quad \text{ou} \quad z = r(\cos\theta + j\sin\theta) \quad \text{ou} \quad z = r.cis\theta \quad \text{ou} \quad z = \angle\theta}$$

En effet, puisque $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, le nombre $z = a + jb$ s'écrit effectivement $z = r\cos\theta + jr\sin\theta$.

Exemples

1- La forme axiomatique $z = (0,4)$, peut s'écrire sous forme algébrique $z = 0 + 4j$ et sous forme trigonométrique $z = 4(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = 4\angle\frac{\pi}{2}$.

2- $z = (1,-1) = 1 - j = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + j\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\angle -\frac{\pi}{4}$

X- Opérations entre nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

Addition

Aucune simplification n'est envisageable.

La multiplication

Soient :

$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + j\sin\vartheta_1) = r_1\angle\vartheta_1$$
$$z_2 = r_2(\cos\vartheta_2 + j\sin\vartheta_2) = r_2\angle\vartheta_2$$

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= r_1r_2(\cos\vartheta_1 + j\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + j\sin\vartheta_2) \\
&= r_1r_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + j\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + j\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + j^2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) \\
&= r_1r_2((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + j(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + j\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) \\
&= r_1r_2\angle\vartheta_1 + \vartheta_2
\end{aligned}$$

Exemple

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 2\angle\frac{\pi}{3} \\ z_2 &= 4\angle\frac{\pi}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_1z_2 = 8\angle\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5} = 8\angle\frac{8\pi}{15}$$

Généralisation

Il est possible de généraliser la multiplication sous la forme :

$$z_1z_2z_3 ..... = r_1r_2r_3 ......\angle\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 ......$$

En particulier - formule de *Moivre*

Si $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ ou $z = r\angle\theta$

et si n est un nombre entier positif, alors

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta) \quad \text{ou} \quad z^n = r^n\angle n\theta}$$

Exemple

$$z = 2\angle\frac{\pi}{3} \Rightarrow z^4 = 2^4\angle 4\frac{\pi}{3} = 16\angle\frac{4\pi}{3}$$

La division

$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + j\sin\vartheta_1) = r_1\angle\vartheta_1$$
$$z_2 = r_2(\cos\vartheta_2 + j\sin\vartheta_2) = r_2\angle\vartheta_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}.\frac{\cos\vartheta_1 + j\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_2 + j\sin\vartheta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}.\frac{(\cos\vartheta_1 + j\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 - j\sin\vartheta_2)}{\cos^2\vartheta_2 - j^2\sin^2\vartheta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}.\frac{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + j\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - j\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 - j^2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}{1} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + j(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)\right) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + j\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}\angle\vartheta_1 - \vartheta_2
\end{aligned}$$

Exemple

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 3\angle\frac{\pi}{3} \\ z_2 &= 4\angle\frac{\pi}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\angle\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{3}{4}\angle\frac{2\pi}{15}$$

XI- Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe écrit sous sa forme trigonométrique :

$$z = r\angle\vartheta = |z|\angle\vartheta$$

Une racine $n^{ème}$ de z est un nombre complexe :

$$u = |u|\angle\alpha$$

tel que :

$$u^n = z$$

Pour déterminer le nombre u , il faut donc déterminer $|u|$ et α tels que :

$$(|u|\angle\alpha)^n = |z|\angle\vartheta$$

La formule de ***Moivre*** permet d'écrire :

$$|u|^n\left(\cos(n\alpha) + j\sin(n\alpha)\right) = |z|\left(\cos\vartheta + j\sin\vartheta\right)$$

ou
$$\begin{cases} |u|^n\cos(n\alpha) = |z|\cos\vartheta & (1) \\ |u|^n\sin(n\alpha) = |z|\sin\vartheta & (2) \end{cases}$$

En élevant ces deux égalités au carré et en les additionnant ensuite membre à membre, le résultat est :

$$|u|^{2n} = |z|^2$$

ou
$$|u|^n = |z|$$

ou encore
$$|u| = \sqrt[n]{|z|}$$

Ainsi, les égalités (1) et (2) deviennent
$$\begin{cases} \cos(n\alpha) = \cos\vartheta \\ \sin(n\alpha) = \sin\vartheta \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire $\qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi \qquad k = 0,1,2,.....$

ou $\qquad \alpha = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ ou encore $\alpha = \dfrac{\vartheta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \qquad k = 0,1,2,....,n-1$

Les *n* racines *n*$^{\grave{e}mes}$ du nombre $z = |z|\angle\vartheta$ sont les n nombres

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|z|}\ \angle\frac{\vartheta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \qquad k = 0,1,2,...,n-1}$$

Un nombre complexe possède donc n racines *n*$^{\grave{e}mes}$ différentes dont les points représentatifs sont situés sur un cercle de rayon égal à $\sqrt[n]{|z|}$.

Les arguments de ces n racines diffèrent d'un angle de $\dfrac{2\pi}{n}$, les n points sont donc régulièrement espacés autour du cercle.

Les n racines z_k d'un nombre z possèdent la propriété : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0}$

Exemple

Soit à calculer les racines carrées de $z = j$.

$z = 1\angle\dfrac{\pi}{2}$ et les deux racines carrées de z sont :

$$z_k = \sqrt{1}\ \angle \frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{2} = 1\ \angle \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k = 0{,}1$$

et donc :

$$z_0 = 1\angle \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_1 = 1\angle \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

XII- Fonction exponentielle complexe

Par définition, la fonction exponentielle complexe est la fonction :

$$\begin{array}{l} f : x \to f(x) = e^{jx} = \cos x + j \sin x \\ \quad\ \in R \quad\ \in C \end{array}$$

Elle possède les propriétés suivantes :

$$e^{j0} = 1$$
$$\left|e^{jx}\right| = 1 \quad \forall x \in R$$
$$e^{jx}.e^{jy} = e^{j(x+y)}$$
$$\frac{1}{e^{jx}} = e^{-jx}$$
$$\frac{e^{jx}}{e^{jy}} = e^{j(x-y)}$$
$$\left(e^{jx}\right)^n = e^{njx}$$
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2}$$

XIII- Forme exponentielle d'un nombre complexe

Le nombre $z = |z|\ \angle\vartheta$ avec ϑ en radians ,

peut s'écrire : $\boxed{z = |z|\ e^{j\vartheta}}$

Par exemple :

$$z = j = 1\ \angle \frac{\pi}{2} = 1\ e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}j}$$
$$z = 3 + 2j = \sqrt{13}\ \angle 0{,}5880.... = \sqrt{13}\ e^{j\,0{,}5880...}$$